



TITLE:

# Near-Domainについて (Generic構造とその応用)

AUTHOR(S):

田中, 克己

---

CITATION:

田中, 克己. Near-Domainについて (Generic構造とその応用). 数理解析  
研究所講究録 2004, 1390: 34-39

ISSUE DATE:

2004-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25830>

RIGHT:

## Near-Domain について

岡山大学理学部数学教室 田中 克己 (Katsumi Tanaka)  
Dept. of Mathematics, Faculty of Science, Okayama Univ.

### 1 はじめに

置換群の研究で, sharply 2-transitive group と near-domain はお互いに自分自身の中に解釈可能であることが知られている [K]. モデル理論では, Nesin らが Morley rank 有限の sharply 2-transitive group の分類をしようとした [BDN],[BN],[DN],[N1],[N2],[DN]. このとき, 彼らは [BN] など near-domain についても研究している. このノートでは, near-domain に焦点をあて, 代数的およびモデル論的考察を試みる.

**定義 1**  $(G, X)$  が sharply 2-transitive group とは, 群  $G$  が集合  $X$  に作用して

$$\forall x, y, c, d \in X \exists! g \in G, gx = c \text{ かつ } gy = d.$$

が成り立つこととする.

$x \in X$  を固定する.  $G_x = \{g \in G | gx = x\}$  と定める. 以降, 簡単のため  $G_x = H$  とおく. involution  $i \in H$  を一つ選び, もう一つ別の involution  $w \in H$  を選ぶ.  $0$  を新しい定数記号で  $(wi)^0 = 1, 0^{-1} = 0$  をみたすものとする.  $\hat{H} = H \cup \{0\}$  と定義する.  $h_1, h_2, h \in \hat{H}$  にたいして,

$$h_1 + h_2 = h \iff (wi)^{h_1-1} (wi)^{h_2-1} \in (wi)^{h-1} H$$

と加法を定義する. 特に,  $h \in H$  にたいして,

$$0 \cdot h = h \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

と定める.

構造  $\langle \hat{H}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  が near-domain となる. ここで, 一般に構造  $\langle D, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  が near-domain とは次の公理をみたすこととする.

**Axiom.**

ND1.  $\langle D, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  は loop.

$$\text{L1. } \forall x, 0 + x = x + 0$$

$$\text{L2. } \forall a, b \exists! x, a + x = b$$

$$\text{L3. } \forall a, b \exists! x, x + a = b$$

$$\text{ND2. } \forall a, b \quad a + b = 0 \implies b + a = 0$$

$$\text{ND3. } \langle D^*, \cdot, 1 \rangle \text{ は群. ここで, } D^* = D - \{0\}.$$

$$\text{ND4. } \forall a \quad 0a = a0 = 0$$

$$\text{ND5. } \forall a, b, c \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\text{ND6. } \forall a, b \exists d_{a,b} \in D^* \quad \forall x \quad a + (b + x) = (a + b) + d_{a,b}x$$

$D$  を near-domain とする.

$$G(D) = \{(a, m) | a, m \in D, m \neq 0\}$$

とおく.  $(a, m)(x) = a + mx$  という作用を考えると,  $G(D)$  は  $\text{Sym}(D)$  の部分群となり,  $G(D)$  は  $D$  に sharply 2-transitive に作用する. 実際,

- $(0, 1)$  が  $G(D)$  の単位元.
- $(b, n)(a, m) = (b + na, d_{b,na}nm)$
- $(a, m)^{-1} = (-(m^{-1}a), m^{-1})$

near-domain  $D$  の標数をもって, sharply 2-transitive group  $G(D)$  の標数とする.

## 2 Near-domain と Near-field

次に構造  $\langle K, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  が near-field とは以下の公理をみたすものとする.

### Axiom

$$\text{NF1. } K^+ = \langle K, +, 0 \rangle \text{ は群}$$

$$\text{NF2. } K^* = \langle K - \{0\}, \cdot, 1 \rangle \text{ は群}$$

$$\text{NF3. } \forall x, y, z \quad x(y + z) = xy + xz$$

$$\text{NF4. } \forall x \quad x0 = 0x = 0$$

ここで注意として,

- 各 near-field は dear-domain.
- $D$  を near-domain としたとき,

$$\begin{aligned} D \text{ は near-field} &\iff \langle D, + \rangle \text{ は群} \\ &\iff d_{a,b} = 1, \forall a, b \in D \end{aligned}$$

ところが, 現状はというと,

**Fact 2** *near-field* でない *near-domain* は知られていない.

そうなのです. こんなこともまだ分かっていないのです.

**例 3** (Dickson *near-field*)

$\langle F, +, * \rangle$  を斜体とする.  $\alpha: F^* \rightarrow \text{Aut}(F^*, +, *)$  なる  $\alpha$  にたいし,  $x \cdot y = x * \alpha(x)(y)$  としたとき,  $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  は *near-field* になる.

**Fact 4** [Hrushovski]

*strongly minimal* な *near-domain* は *near-field* である.

**定義 5** *near-domain*  $D$  の核 (kernel)  $\ker(D)$  を

$$\ker(D) = \{d \in D \mid (a+b)d = ad + bd \quad \forall a, b \in D\}$$

と定義する.

**Fact 6** [Cherlin et al]

$F$  を Morley rank 有限な *near-field*,  $\ker(D)$  は無限とすると,  $F$  は代数閉体となる.

次の定理を示す前にいくつかテクニカルな補題を用意しておく. 証明の計算はそれほど難しくはない.

**補題 7**  $D$  を *near-domain*. 任意の  $a, b, c \in D$  にたいして次が成り立つ.

- (i)  $a \cdot 0 = 0$
- (ii)  $d_{a,0} = d_{0,a} = 1$
- (iii)  $a + b = d_{a,b}(b + a)$
- (iv)  $d_{a,a} = 1$
- (v)  $cd_{a,b}c^{-1} = d_{ca,cb}$
- (vi)  $d_{a,b}^{-1} = d_{b,a}$
- (vii)  $d_{a+b,b} = d_{a,b}$
- (viii)  $x + a = b \Rightarrow x = -a + d_{a,b}b$

**定理 8**  $\langle D, +, \cdot \rangle$  を *near-domain* とし,  $\ker$  をその核とする. このとき,

$$\exists k \in K, \quad 1 + k \in K \implies \langle D, +, \cdot \rangle \text{ は } \textit{near-field}.$$

*Proof.*  $k, 1+k \in K$  とする.

Claim 1.  $d_{k,1} = 1$

$$\begin{aligned}
 1 + (k + (1 + k)) &= (1 + k) + d_{1,k}(1 + k) \\
 &= (1 + d_{1,k})(1 + k) \\
 &= (1 + d_{1,k}) + (1 + d_{1,k})k \\
 &= 1 + d_{1,k}d_{d_{1,k},1}(1 + d_{1,k})k \\
 &= 1 + d_{1,k} + (d_{1,k} + 1)k \\
 &= 1 + (d_{1,k} + (d_{1,k}k + k)) \\
 &= 1 + ((d_{1,k} + d_{1,k}k) + d_{d_{1,k},d_{1,k}k}k) \\
 &= 1 + (d_{1,k}(1 + k) + d_{d_{1,k},d_{1,k}k}k) \\
 &= 1 + (d_{1,k}(1 + k) + 1 \cdot d_{1,k} \cdot 1^{-1}k) \\
 &= 1 + d_{1,k}((1 + k) + k)
 \end{aligned}$$

したがって,

$$k + (1 + k) = d_{1,k}((1 + k) + 1) \quad (1)$$

また,

$$\begin{aligned}
 k + (1 + k) &= (k + 1) + d_{k,1} + k \\
 &= d_{k,1}(1 + k) + d_{k,1}k \\
 &= d_{k,1}((1 + k) + k)
 \end{aligned} \quad (2)$$

(1),(2) より,

$$(1 + k) + k = 0 \quad (3)$$

または,

$$d_{k,1} = d_{1,k} \quad (4)$$

(3) からは,

$$d_{k,1} = d_{-2^{-1},1} = 2 \cdot d_{-1,2} \cdot 2^{-1} = 2 \cdot d_{1,2} \cdot 2^{-1}$$

ここで,

$$d_{1,2} = (d_{2,1})^{-1} = (d_{1,1})^{-1} = 1^{-1} = 1$$

したがって,  $d_{k,1} = 1$ .

また, (4) から  $d_{k,1} = 1$  が得られる.

Claim 2.  $\forall a, b \quad a + b = b + a$ .

$$\forall x \in F^*, \quad 1 = xd_{k,1}x^{-1} = d_{xk,x} = xd_{1,k}x^{-1} = d_{x,xk}$$

いま,  $a, b \in F^*$  で  $a' = ak^{-1}$ ,  $b' = b(1+k)^{-1}$  とおく. このとき,

$$\begin{aligned}
 (a' + b')(1 + k) &= a'(1 + k) + b'(1 + k) \\
 &= a' + a'k + b \\
 &= a' + a + b \\
 &= a' + (a + d_{a',a}b) \\
 &= a' + (a + d_{a',a'k}b) \\
 &= a' + (a + b)
 \end{aligned} \tag{5}$$

また,

$$\begin{aligned}
 (a' + b')(1 + k) &= (a' + b) + (a' + b')k \\
 &= a' + (b' + d_{b',a}(a' + b')k) \\
 &= a' + (b' + (b' + a')k) \\
 &= a' + (b' + (b' + (b'k + a'k))) \\
 &= a' + (b' + (b'k + a)) \\
 &= a' + ((b' + b'k) + d_{b',b'k}a) \\
 &= a' + (b'(1 + k) + a) \\
 &= a' + (b + a)
 \end{aligned} \tag{6}$$

(5) と (6) より,

$$a + b = b + a$$

したがって,  $d_{a,b} = 1$  □

系 9  $\langle F, +, \cdot \rangle$  を *near-domain* とする.  $F$  の標数が 3 ならば, これは *near-field*.

*Proof.*  $k = 1$  とおく.  $1 + 1 = -1 \in K$  □

## References

- [BDN] A.Borovik, M.DeBonis and A.Nesin *On a class of doubly transitive  $\omega$ -stable groups*, Journal of Algebra Vol.165 No.2(1994)345-257.
- [BN] A.Borovik and A.Nesin *Groups of finite Morley rank*, Oxford 1994.
- [DN] F.Delahan and Ali Nesin *Sharply 2-transitive groups revisited*, Doga, The Turkish J. Math. 17(1993)70-83.
- [H] Wilfrid Hodges *Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [K] William Kerby *On infinite sharply multiply transitive groups*. Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1974

- [N1] Ali Nesin *On sharply  $n$ -transitive superstable groups*, J.Pure and Applied Algebra 69(1990)73-88.
- [N2] Ali Nesin *Notes on sharply 2-transitive permutation groups*, Doga, The Turkish J. Math. 16(1992)39-54.
- [S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math 7(1969)187-202.
- [W] F.Wagner *Stable Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 240, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.